1.7.11 Plastischer und elastischer Stoss

******

1 Motivation

Dieser Versuch demonstriert das unterschiedliche Verhalten von elastischen und unelastischen Stössen.

2 Experiment

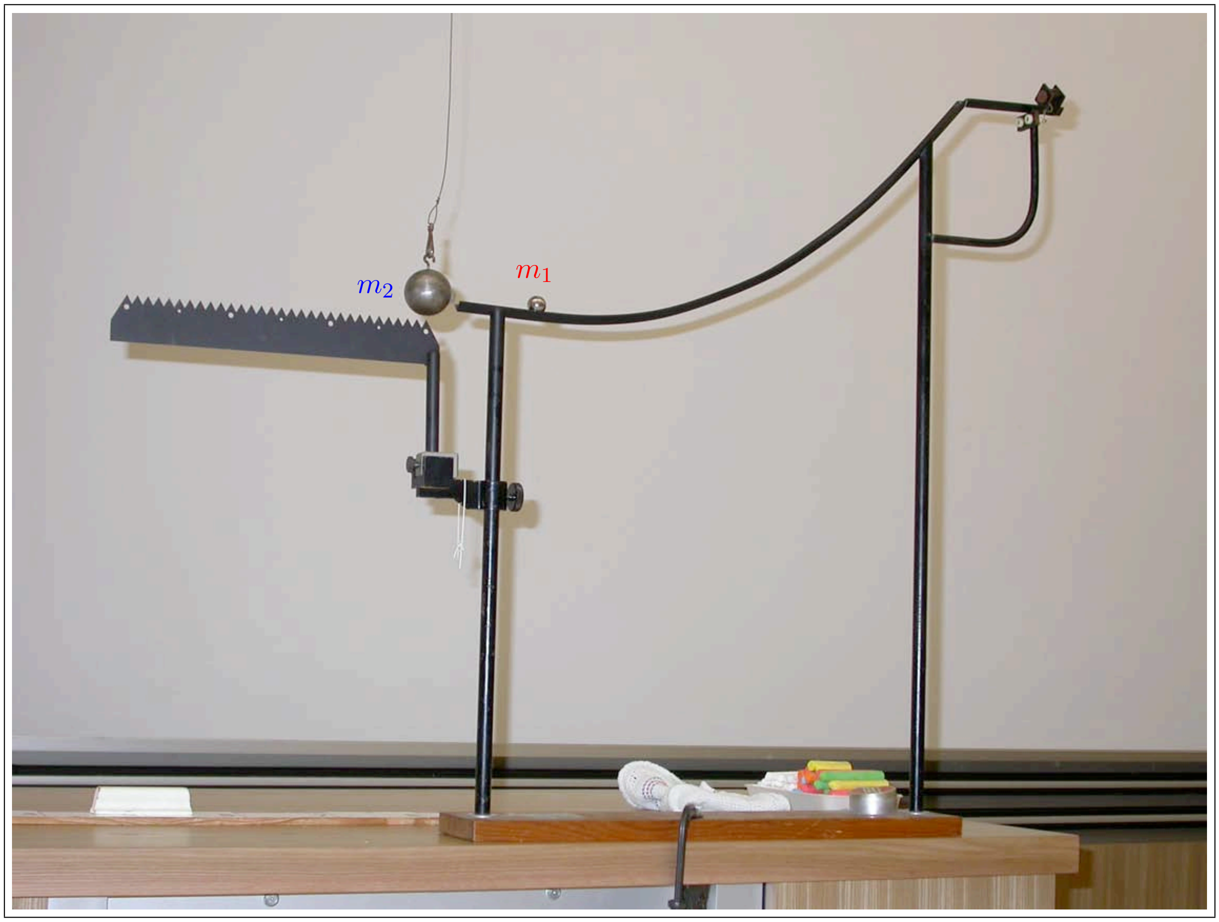

Abbildung 1: Elastischer Stoss

Eine kleine Kugel der Masse m_1 rollt eine Kugelrinne herunter und trifft auf eine Kugel der Masse $m_2 \gg m_1$ mit dem Impuls p auf (siehe Abb. 1). Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) **Elastischer Stoss (Stahl auf Stahl)**

b) **Unelastischer Stoss (Stahl auf Plastilin)**

a) Beim **elastischen Stoss** bleibt die kinetische Energie erhalten. Es gelten somit sowohl der Impuls- als auch der Energiesatz:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{1}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 {v_2'}^2 \tag{2}$$

Dabei sind v_1' und v_2' die Geschwindigkeiten der beiden Massen nach dem Stoss, wobei zu beachten ist, dass sie 1-dimensionale Vektoren und nicht Beträge sind, also positiv oder negativ sein können.

Wir führen die Grösse $\varepsilon = m_1/m_2 \ll 1$ ein. Damit lassen sich Gln. (1) und (2) folgendermassen schreiben:

$$v_1 = v_1' + \frac{1}{\varepsilon} v_2' \tag{3}$$

$$v_1^2 = {v_1'}^2 + \frac{1}{\varepsilon} {v_2'}^2 \tag{4}$$

Durch Elimination von v_1' erhält man schliesslich:

$$\boxed{v_2' = \frac{2\varepsilon v_1}{1+\varepsilon} \approx 2\varepsilon v_1} \tag{5}$$

und für die kinetische Energie:

$$\boxed{E_2' = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} E_1 \approx 4\varepsilon E_1} \tag{6}$$

b) Beim **unelastischen Stoss** bleibt zwar ebenfalls der Impuls, nicht aber die kinetische Energie erhalten. Es gilt somit nur der Impulssatz:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, u\,, \tag{7}$$

wobei u die gemeinsame Geschwindigkeit von m_1 und m_2 ist.

Damit ist

$$\boxed{u = \frac{\varepsilon v_1}{1+\varepsilon} \approx \varepsilon v_1} \tag{8}$$

und

$$\boxed{E' = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\, u^2 \approx \varepsilon E_1} \tag{9}$$

Wir leiten nun im Folgenden die horizontale Auslenkung x ab:

Für die angestossene Masse ergibt sich eine Pendelbewegung, wobei die maximale Auslenkung um den Winkel α_i aus der jeweils zur Verfügung stehende Energie folgt. Es gilt:

$$m_2 g h_\mathrm{e} = E_2' \quad \Rightarrow \quad h_\mathrm{e} = \frac{E_2'}{m_2 g} \approx \frac{4\varepsilon E_1}{m_2 g} \tag{10}$$

und entsprechend

$$(m_1 + m_2)\, g h_\mathrm{u} = E' \quad \Rightarrow \quad h_\mathrm{u} = \frac{E'}{(m_1+m_2)\, g} \approx \frac{\varepsilon E_1}{m_2 g}\,, \tag{11}$$

wobei h_e und h_u die maximale vertikale Auslenkung für den elastischen bzw. für den unelastischen Fall bedeuten (siehe Abb. 2).

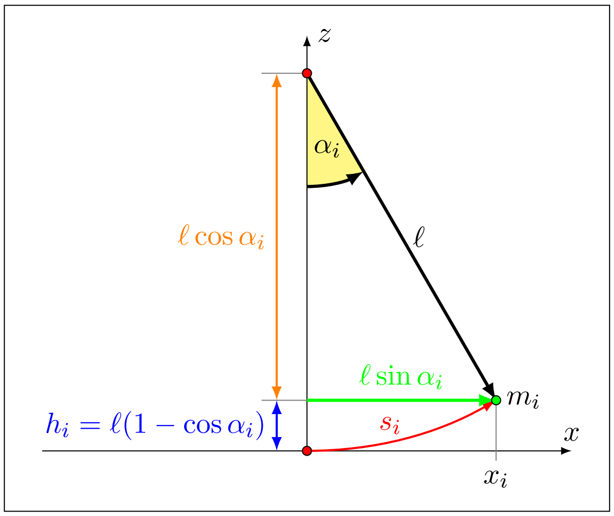

Abbildung 2: Maximale horizontale Auslenkung x und maximale Höhe h der Masse m.

Für die Maximalhöhen h_i und die maximalen horizontalen Auslenkungen x_i ergibt sich gemäss Abb. 2:

$$x_i = \ell \sin \alpha_i \tag{12}$$
$$h_i = \ell\,(1 - \cos \alpha_i) \tag{13}$$

Da die Fäden der Aufhängung sehr lang sind, gilt $\alpha_i \ll 1$, so dass wir in guter Näherung x_i und h_i bis zur 2. Ordnung in α_i entwickeln können:

$$x_i \approx \ell \alpha_i \tag{14}$$
$$h_i \approx \tfrac{1}{2} \ell \alpha_i^2 \tag{15}$$

Aus Gln. (10), (11) und (15) folgt:

$$\frac{h_\mathrm{e}}{h_\mathrm{u}} = 4 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \tag{16}$$

Daraus folgt schliesslich für das Verhältnis der horizontalen Auslenkungen:

$$\boxed{\frac{x_{\mathrm{e}}}{x_{\mathrm{u}}} = \frac{\alpha_{\mathrm{e}}}{\alpha_{\mathrm{u}}} = 2} \tag{17}$$

Beim elastischen Stoss wird also die Kugel doppelt soweit ausgelenkt wie beim unelastischen Stoss!